

Neo-Riemann elmélet

Károlyi Éva

Ebben a kis összefoglalóban szeretném bemutatni a Neo-Riemann elméletet (későbbiekben csak NRT). Ludwig van Beethoven vitathatatlanul az egyik legtehetségesebb zeneszerző. A híres V., illetve IX. szimfóniájában szépen vizsgálható az NRT. De nem csak komolyzenei művek elemzésére használható, hanem bármely műfajnál alkalmazható. Ahhoz, hogy megértsük az elméletet egy kis matematikai tudásra is szert kell tennünk. Azokat a definíciókat, amelyeket középiskolában nem tanulhatott az Olvasó, a következő bekezdésben megmutatom, illetve egyszerű példákat is hozok a gyorsabb megértés érdekében.

Legyen A egy nem üres halmaz. Az $m : A \times A \longrightarrow A$ függvényt műveletnek nevezzük. Az A halmazt a rajta értelmezett $a_1, a_2, \dots$ műveletekkel algebrai struktúrának nevezzük. Jelölése: $(A, a_1, a_2, \dots)$. Az A halmazon értelmezett $\diamond$ művelet asszociatív, ha $\forall a, b \in A$ esetén

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$$

Legyen A egy nem üres halmaz, $\diamond$ egy rajta értelmezett művelet. Ekkor ha létezik olyan e elem A -ban, hogy $e \diamond a = a$ és $a \diamond e = a$ teljesülnek $\forall a \in A$ esetén, akkor ezt az e elemet neutrális elemnek nevezzük. Legyen $\diamond$ az A halmazon értelmezett művelet, amelyre vonatkozó neutrális eleme e . Az A halmaz a elemének létezik inverze, ha van olyan $b \in A$, hogy $a \diamond b = b \diamond a = e$. Ekkor b -t az a inverzének nevezzük. Az $(A, \diamond)$ algebrai struktúrát csoportnak nevezzük, ha $\diamond$ asszociatív, A -nak van neutrális eleme, és A minden elemének létezik inverze. Nézzünk egy példát, hogy az előbb leírtak könnyen érthetőek legyenek. Vegyük az egész számokat az összeadás művelettel. Tehát a $(\mathbb{Z}, +)$ csoport, mert

asszociatív: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ esetén $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Például $(3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2)$.

Létezik neutrális elem, ez pedig a 0 , hiszen $\forall a \in \mathbb{Z}$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$. Például $3 + 0 = 0 + 3 = 3$.

$\mathbb{Z}$ minden elemének van inverze, hiszen bármely egész számhoz létezik egy olyan másik egész szám, amelyet ha összeadunk a neutrális elemet kapjuk, vagyis a nullát.

Például $3 + (-3) = (-3) + 3 = 0$.

Az $(A, \diamond)$ és a $(B, *)$ csoportok izomorfak, ha létezik olyan $f: A \rightarrow B$ bijektív leképezés, amelyre tetszőleges $a, b \in A$ esetén $f(a \diamond b) = f(a) * f(b)$. Most nézzük meg $\mathbb{Z}$ bizonyos részhalmazait. Legyen m egy egynél nagyobb pozitív egész szám és legyen $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Például $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $\mathbb{Z}_m$ halmazon definiáljuk az összeadást, amely nem más mint az $a+b$ egész m -mel való osztási maradéka ($\forall a, b \in \mathbb{Z}_m$, jelölés: mod m). Az előző példánál maradva, vegyünk elemeket $\mathbb{Z}_6$ -ból, például 4 és 3. Ezeket adjuk össze $4+3=7$, a hetet osztjuk 6-tal, ennek a maradéka 1. Így $3+4=1$. Most definiáljuk a szorzást hasonlóképpen, tehát az a, b elemek szorzata az ab egész m -mel való osztási maradéka. Újra vegyünk példának $\mathbb{Z}_6$ -ból a 4 és 3 egészeket. Ekkor ugye $4*3=12$, ezt osztjuk 6-tal, ennek a maradéka 0, tehát ebben az esetben $4*3=0$.

Hugo Riemann (1849–1919) német zeneszerző, zeneelméleti kutató. *Handbuch der Harmonielehre* című értekezésében a harmóniákat, mint függvényeket írta le. *David Benjamin Lewin* (1933–2003) amerikai zeneszerző Riemann munkája alapján dolgozta ki a Neo-Riemann elméletet, amely transzformációk által felépített elmélet, ami a zenét csoportelmélet segítségével írja le. Az NRT-t mélyebben tanulmányozta még például Brian Hyer és Richard Cohn. Az elméletet a hármashangzatokon, azon belül a dúrokon és mollokon fogom megmutatni.

Ebben az elméletben a kromatikus skála adja az alapot. A skála hangjait $\mathbb{Z}_{12}$ elemeivel írja le a következőképpen:

Hang neve (pitch name)	Hangosztály (pitch class-pc)
C	0
$C\sharp = D\flat$	1
D	2
$D\sharp = E\flat$	3
E	4
F	5
$F\sharp = G\flat$	6
G	7
$G\sharp = A\flat$	8
A	9
$A\sharp = B$	10
H	11

A dúrokat és mollokat a hangoknak megfelelő hangosztállyal jelöljük.

A C -dúr hangjai: $C E G$, tehát ennek jelölése $\langle 0\ 4\ 7 \rangle$. A számok sorrendje felcserélhető. A 1. táblázatban összefoglalom ezeket a könnyebb átláthatóság érdekében.

Dúr	Moll
$C = \langle 0\ 4\ 7 \rangle$	$C = \langle 0\ 3\ 7 \rangle$
$C\sharp = D\flat = \langle 1\ 5\ 8 \rangle$	$C\sharp = D\flat = \langle 1\ 4\ 8 \rangle$
$D = \langle 2\ 6\ 9 \rangle$	$D = \langle 2\ 5\ 9 \rangle$
$D\sharp = E\flat = \langle 3\ 7\ 10 \rangle$	$D\sharp = E\flat = \langle 3\ 6\ 10 \rangle$
$E = \langle 4\ 8\ 11 \rangle$	$E = \langle 4\ 7\ 11 \rangle$
$F = \langle 5\ 9\ 0 \rangle$	$F = \langle 5\ 8\ 0 \rangle$
$F\sharp = G\flat = \langle 6\ 10\ 1 \rangle$	$F\sharp = G\flat = \langle 6\ 9\ 1 \rangle$
$G = \langle 7\ 11\ 2 \rangle$	$G = \langle 7\ 10\ 2 \rangle$
$G\sharp = A\flat = \langle 8\ 0\ 3 \rangle$	$G\sharp = A\flat = \langle 8\ 11\ 3 \rangle$
$A = \langle 9\ 1\ 4 \rangle$	$A = \langle 9\ 0\ 4 \rangle$
$A\sharp = B = \langle 10\ 2\ 5 \rangle$	$A\sharp = B = \langle 10\ 1\ 5 \rangle$
$H = \langle 11\ 3\ 6 \rangle$	$H = \langle 11\ 2\ 6 \rangle$

1. táblázat. Dúr, moll hangosztályok

Az elméletben a dúrt, illetve a mollt a következőképpen jelöljük:

dúr = (*alaphang*, +), moll = (*alaphang*, -)

Például:

C-dúr (C , +)

C-moll (C , -)

Legyen S ezeknek a hármashangzatoknak (lásd 1. táblázat) a halmaza mod 12. Az NRT-ben alapvetően 3 transzformáció létezik:

$P, R, L: S \rightarrow S$, ahol

1. P : Párhuzamossági transzformáció. Ebben az esetben dúrból mollt képzünk úgy, hogy a hármashangzat tercét fél hanggal lejjebb szállítjuk, mollból dúrt pedig úgy, hogy a tercet fél hanggal feljebb szállítjuk. Például a C -dúrból a párhuzamossági transzformáció után C -moll lesz.
 $\langle 0\ 4\ 7 \rangle \xrightarrow{P} \langle 0\ 3\ 7 \rangle$
2. R : Relatív transzformáció. Ebben az esetben dúrból mollt képzünk úgy, hogy a hármashangzat kvintjét egy egész hanggal feljebb szállítjuk, mollból dúrt pedig úgy, hogy a hármashangzat alaphangját egy egész hanggal lejjebb visszük. A C -dúrból relatív transzformáció után A -moll

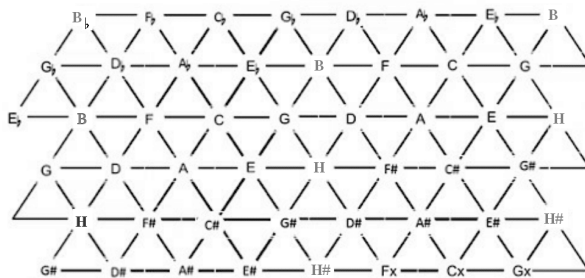
lesz.

$$\langle 0\ 4\ 7 \rangle \rightarrow_R \langle 9\ 0\ 4 \rangle$$

3. L : Vezető elemcsere (Leittonwechsel). Ebben az esetben dúrból mollt képzünk úgy, hogy a hármashangzat alaphangját fél hanggal lejjebb szállítjuk, mollból dúrt pedig úgy, hogy a hármashangzat kvintjét fél hanggal feljebb emeljük. A C -dúrból például E -moll lesz.

$$\langle 0\ 4\ 7 \rangle \rightarrow_L \langle 4\ 7\ 11 \rangle$$

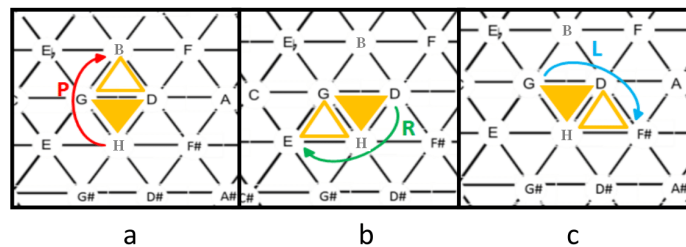
Ezeknek a transzformációknak van egy szép geometriai leírása, amelyet egy úgynevezett *Tonnetz*-ben, vagyis hanghálózatban ábrázolunk. A Tonnetz egy



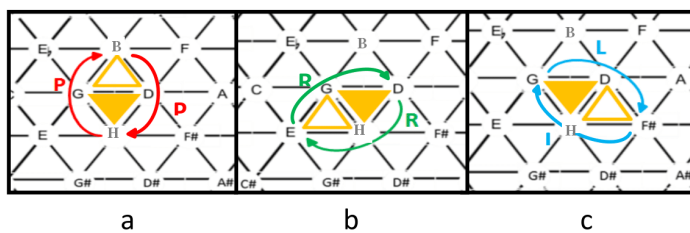
1. ábra. Tonnetz

háromszögekből álló ábra, ahol a háromszögek csúcsain helyezkednek el a kromatikus skála hangjai, és mindegyik háromszög egy-egy hármashangzat. Elhelyezkedésüket a 1. ábra mutatja be, amelyen ha az ugyanazon oszlopban lévő hangokat nézzük, akkor fél hangonként mindig feljebb lépünk, illetve ha ugyanazon sort nézzük, akkor minden második hang között egy egész hang távolság van emelkedő sorrendben. Nem ez az egyetlen ilyen ábra. A hangokat ábrázolhatjuk a nekik megfelelő hangosztályok segítségével is, tehát amikor a hangok helyére a nekik megfelelő $\mathbb{Z}_{12}$ elemei kerülnek.

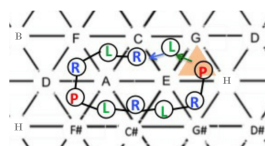
A következőkben a transzformációk Tonnetz-ben való ábrázolását szeretném bemutatni. Példaként nézzük a G -dúrt. Először jelöljük meg azt a háromszöget, ahol a G -dúr szerepel (ez az ábrán a teli háromszög). A párhuzamos transzformáció során a G -dúr H hangját fél hanggal lejjebb szállítjuk, így a transzformáció után G -mollt kapunk (2./a ábra). A relatív transzformáció során a D hangból E lesz (2./b ábra), a vezető elemcserénél pedig a G -ből $F\sharp$ (2./c ábra). Ha ugyanazon transzformációkat még egyszer elvégezzük, akkor az eredeti hármashangzatot kapjuk vissza (3. ábra). A 4. ábrán egy példát mutatok ezekre a transzformációkra, amelyeket Tonnetz-ben is ábrázolok. Láthatjuk, hogy könnyen visszajuthatunk az eredeti hármashangzatunkhoz



2. ábra. PRL transzformációk



3. ábra. Visszatérés az eredeti hármashangzatra

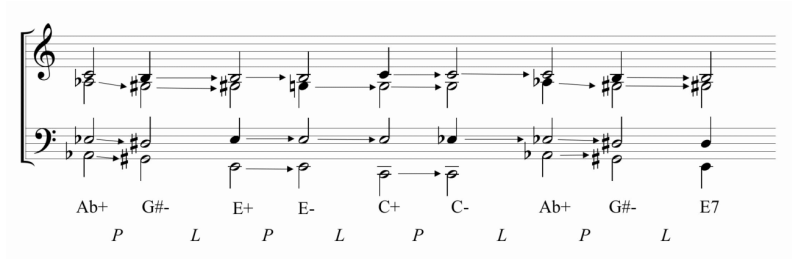


4. ábra. Példa PRL transzformációra

a transzformációk segítségével. A nyilak megmutatják, hogy melyik hangot transzformáltuk, ezek segítségével könnyebben láthatjuk, hogy mely transzformációt használjuk éppen.

Gyakran előfordul, hogy az NRT elemzés egy ciklust tartalmaz, amely ismétlődő NRT transzformációk sorozata.

Először vizsgáljuk meg az LP/PL ciklust. Ilyen ciklust találunk Johannes Brahms *hegedűversenyében* (5. ábra).



5. ábra. Johannes Brahms, Hegedűverseny (hegedűre és csellóra), Cohn kivonata, első tétel [3]

$$\begin{aligned}
 &(C, +) \rightarrow_L (E, -) \rightarrow_P (E, +) \rightarrow_L (G^\sharp, -) \rightarrow_P (A^\flat, +) \rightarrow_L \\
 &(C, -) \rightarrow_P (C, +) \\
 &(C, +) \rightarrow_P (C, -) \rightarrow_L (A^\flat, +) \rightarrow_P (G^\sharp, -) \rightarrow_L (E, +) \rightarrow_P \\
 &(E, -) \rightarrow_L (C, +)
 \end{aligned}$$

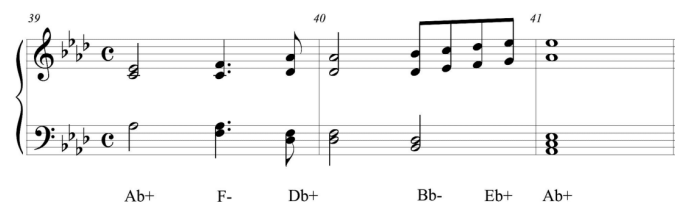
Ebben az esetben egymás után végzünk L és P transzformációkat. Véges sok lépés után az eredeti hármashangzatot fogjuk visszakapni.

Most nézzük meg a LR/RL ciklust. Ebben az esetben egymás után végzünk el a L és R transzformációkat. Itt szintén véges sok lépés során (sokkal több lépés során, mint az előbb) visszakapjuk az eredeti hármashangzatot.

$$\begin{aligned}
 &(C, +) \rightarrow_R (A, -) \rightarrow_L (F, +) \rightarrow_R (D, -) \rightarrow_L (B, +) \rightarrow_R \\
 &(G, -) \rightarrow_L (E^\flat, +) \rightarrow_R (C, -) \rightarrow_L (A^\flat, +) \rightarrow_R (F, -) \rightarrow_L \\
 &(D^\flat, +) \rightarrow_R (B, -) \rightarrow_L (G^\flat, +) \rightarrow_R (E^\flat, -) \rightarrow_L (H, +) \rightarrow_R \\
 &(G^\sharp, -) \rightarrow_L (E, +) \rightarrow_R (C^\sharp, -) \rightarrow_L (A, +) \rightarrow_R (F^\sharp, -) \rightarrow_L \\
 &(D, +) \rightarrow_R (H, -) \rightarrow_L (G, +) \rightarrow_R (E, -) \rightarrow_L (C, +)
 \end{aligned}$$

Ilyen ciklust láthatunk Richard Wagner, *Parsifal* című operájában (6. áb-

ra).

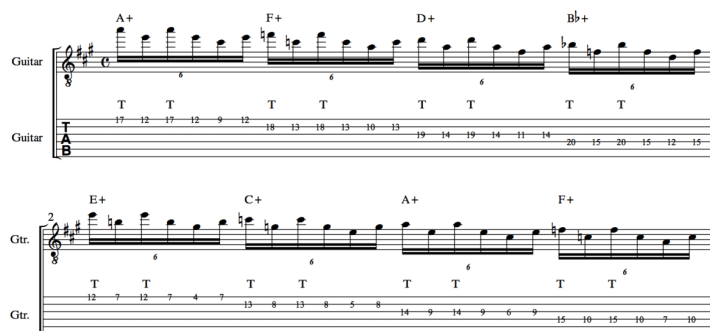


6. ábra. Richard Wagner, Parsifal, Act I. [3]

A harmadik ilyen ciklus az RP/PR ciklus. Itt is hasonlóan járunk el:

$$(C, +) \longrightarrow_P (C, -) \longrightarrow_R (E\flat, +) \longrightarrow_P (E\flat, -) \longrightarrow_R (G\flat, +) \longrightarrow_P (G\flat, -) \longrightarrow_R (A, +) \longrightarrow_P (A, -) \longrightarrow_R (C, +)$$

Guy Capuzzo egy cikkében vizsgálta a Pop-Rock zenét az NRT segítségével. Bármely zene leírható az NRT transzformációkkal. Az egyik ilyen zeneszám, amelyet Capuzzo vizsgált, Ozzy Osbourne *"Flying High Again"* című zene-száma, amelynek gitárvonalát vizsgálta.

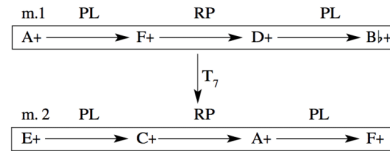


7. ábra. Ozzy Osbourne, Flying High Again [4]

Először összetett transzformációkat ír le ($PL \rightarrow RP \rightarrow PL$), tehát például elvégez egy P , majd egy L transzformációt és csak ezután írja le a

megkapott hármashangzatot, majd ugyanezt egy tiszta kvinttel (T_7) feljebb újra megteszi.

Capuzzo cikkében több könnyűzenei dal vizsgálatát is olvashatjuk.



8. ábra. Ozzy Osbourne, Flying High Again [4]

Most térjünk vissza egy kicsit a matematikához. Vizsgáljunk meg egy T transzformációt illetve egy I inverziót annak érdekében, hogy a P , R , L transzformációkat másképpen is előállíthassuk.

A T transzformációt és az I inverziót a következőképpen definiáljuk:

$$T_n: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$T_n(x): = x + n \pmod{12}$$

$$I_n: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$I_n(x): = -x + n \pmod{12}$$

Bemutatok ezekre egy-egy példát:

Vegyünk alapul a C -dúrt: $\langle 0 \ 4 \ 7 \rangle$, ennek 2-vel való transzformációja:

$T_2(\langle 0 \ 4 \ 7 \rangle) = \langle 2 \ 6 \ 9 \rangle$, ez nem más, mint a D -dúr. Tehát C -dúrnak 2-vel való transzformációja a D -dúr.

$I_2(\langle 0 \ 4 \ 7 \rangle) = \langle 2 \ 10 \ 7 \rangle$, ez nem más, mint a G -moll. Tehát a C -dúrnak 2-vel való inverziója a G -moll.

Az inverzió segítségével állítsuk elő a P , R , L transzformációkat.

$$1. \ P(\langle y_1 \ y_2 \ y_3 \rangle) = I_{y_1+y_3}(\langle y_1 \ y_2 \ y_3 \rangle)$$

$$2. R(< y_1 y_2 y_3 >) = I_{y_1+y_2}(< y_1 y_2 y_3 >)$$

$$3. L(< y_1 y_2 y_3 >) = I_{y_2+y_3}(< y_1 y_2 y_3 >)$$

Ezekre is mutatok példát:

1. Azt már az előző részből tudjuk, hogy $(C, +) \longrightarrow_P (C, -)$. Most csináljuk meg ugyanezt az inverzióval:

$$I_{0+7}(<0\ 4\ 7>) = I_7(<0\ 4\ 7>) = <7\ 3\ 0>, \text{ amely nem más, mint a } (C, -).$$

2. $(C, +) \longrightarrow_R (A, -)$

$$I_{0+4}(<0\ 4\ 7>) = I_4(<0\ 4\ 7>) = <4\ 0\ 9> = (A, -).$$

3. $(C, +) \longrightarrow_L (E, -)$

$$I_{4+7}(<0\ 4\ 7>) = I_{11}(<0\ 4\ 7>) = <11\ 7\ 4> = (E, -).$$

A T transzformációval és I inverzióval sok csoportelméleti összefüggést lehet leírni, amelyek segítségével tovább lehet vizsgálni egy adott művet. Érdekességképpen megemlítem, hogy a T és I által kialakult T/I -vel jelölt csoport izomorf lesz az úgynevezett 12-edrendű diédercsoporttal és ez újabb érdekes vizsgálódásra ad lehetőséget zeneelméleti szempontból is. Remélem sikerült a kedves Olvasó érdeklődését felkeltenem a Neo-Riemann elmélet iránt.

Hivatkozások

- [1] ALISSA S. CRANS, THOMAS M. FIORE, RAMON SATYENDRA: Musical Actions of Dihedral Groups , The American Mathematical Monthly, vol. 116, no. 6, Washington DC, 2009.
- [2] DAVID LEWIN: On generalized intervals and transformations, Journal of Music Theory, Yale University, 1980.

- [3] LAURA FELICITY MASON: Essential Neo–Riemannian Theory for Today’s Musician, University of Tennessee, Knoxville, 2013.
- [4] GUY CAPUZZO: Neo–Riemannian Theory and the Analysis of Pop–Rock Music, Music Theory Spectrum 26.2, University of California, 2004.
- [5] PRL KALKULÁTOR: <http://neralt.com/neoriemann/>, 2018.01.29.